

## はじめに

カスケード積分楕形 (CIC) フィルタは、ハードウェア効率の高い、リニア・フェーズ有限インパルス応答 (FIR) デジタル・フィルタの一種です。CIC フィルタは乗算器を使わずに、サンプリング・レートを減少 (デシメーション) または増加 (インターポレーション) させることができます。アルテラの CIC コンパイラ MegaCore®ファンクションは、Hogenauer 法に基づくさまざまな CIC フィルタを実装します。



CIC フィルタは 1981 年に Eugene Hogenauer によって提案されました。CIC フィルタに関する詳細は、「An economical class of digital filters for decimation and interpolation」、Eugene B. Hogenauer、*IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*、pp. 155-162、1981 年 4 月を参照してください。

CIC フィルタは、同じ段数の理想積分フィルタおよび楕形フィルタから構成されます。周波数応答は、カスケード接続された積分器と楕形フィルタのペアの数を適切に選択することで調整できます。構造上、極めて対称性が高い CIC フィルタは、効率的なハードウェア実装が可能です。ただし、CIC フィルタには通過帯域が平坦でないという欠点があります。これは、多くのアプリケーションで好ましくない特性です。さいわい、この問題は補償フィルタを使用することで緩和できます。

このアプリケーション・ノートでは、サンプル・レート変換システム用の CIC 補償フィルタについて、その理論と設計方法を説明します。補償 FIR フィルタの係数設計には、MATLAB 信号処理ツールボックスを使用します。また、補償フィルタを設計するときのパラメータ選定方法、更にアルテラ CIC コンパイラ MegaCore ファンクションおよび FIR コンパイラ MegaCore ファンクションによる、デシメーション・システム例の実装方法についても解説しています。

本書で説明するトピックは次のとおりです。

- 2 ページの「前提条件」
- 2 ページの「CIC フィルタの構成」
- 4 ページの「CIC 補償フィルタの設計」
- 10 ページの「データ・レートを低くする変換の例」
- 17 ページの「まとめ」

## 前提条件

本書は、レート変換システム用の CIC 補償フィルタを設計する、デジタル信号処理 (DSP) システムのエンジニアを対象としています。

CIC 補償フィルタの各種設計方法の間のトレードオフを理解するうえで、DSP およびデジタル・フィルタ設計の基本的知識が役立つでしょう。

また、このアプリケーション・ノートで使用する例や図を理解し、同じものを作成してみるには、次の知識が必要です。

- MATLAB および SIMULINK に関する、ある程度の経験
- DSP Builder を含むアルテラ DSP ソリューションに関する、ある程度の知識



このアプリケーション・ノートで使用する設計例は、次のサイトより入手できます。

[www.altera.com/support/examples/dsp-builder/exm-digital-down-conv-cic-fir.html](http://www.altera.com/support/examples/dsp-builder/exm-digital-down-conv-cic-fir.html)

## CIC フィルタの構成

図 1 に示すとおり、CIC フィルタの基本的な構成要素は、積分フィルタと楕円フィルタです。

図 1.3 段構成の CIC デシメーションおよびインターポレーション・フィルタのブロック図



CIC デシメーション・フィルタ



CIC インターポレーション・フィルタ



積分フィルタ



サンプリング・レート低減



楕形フィルタ



サンプリング・レート増加

積分フィルタは、単一ポールのアキュムレータで、伝達関数  $H_I(z)$  は、次のとおりです（計算式 1）。

$$(1) \quad H_I(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

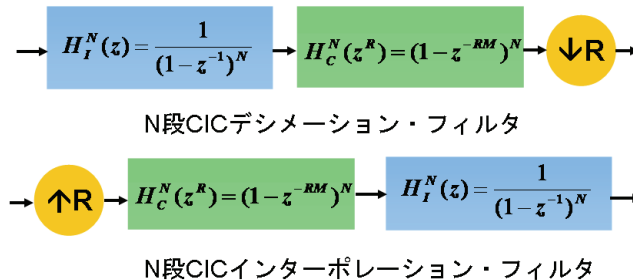
楕形フィルタは微分器で、伝達関数  $H_C(z)$  は、次のとおりです（計算式 2）。

$$(2) \quad H_C(z) = 1-z^{-M}$$

この式の  $M$  は遅延差で、通常 1 または 2 に制限されます。

CIC フィルタでは、高いサンプリング周波数 ( $f_s$ ) では積分器、低い周波数 ( $f_s/R$ ) では楕形フィルタが動作します。ノーブル恒等変換を用いて、これらをカスケード接続したものの等価周波数応答を計算できます（図 2）。

図 2.  $N$  段 CIC フィルタの等価周波数応答のブロック図



計算式 3 に、高周波 ( $f_s$ ) における CIC フィルタの総応答を示します。

$$(3) \quad H(z) = H_I^N(z)H_C^N(z^R) = \left( \sum_{k=0}^{RM-1} z^{-k} \right)^N$$

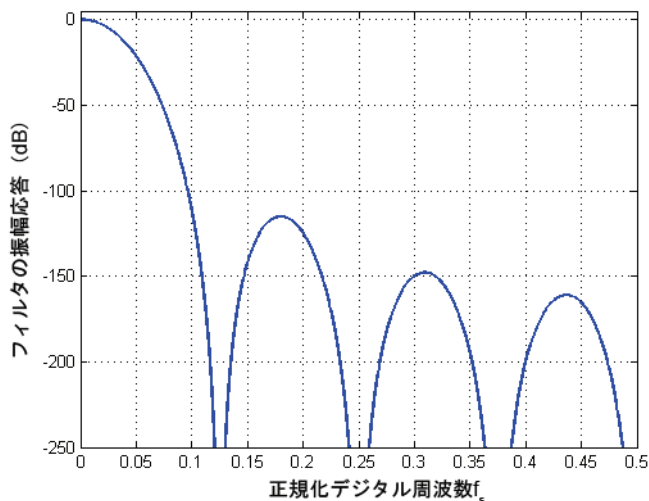
この式の  $N$  は積分 - 楕形フィルタのペアの数、 $R$  はレート変換率です。計算式 3 は、CIC フィルタの等価時間ドメインのインパルス応答が、 $N$  個の矩形パルスのカスケードと見なせることを示しています。各矩形パルスには、 $RM$  個のタップがあります。

計算式 4 は、高周波 ( $f_s$ ) における  $N$  段 CIC フィルタの振幅応答を表わす式です。

$$(4) \quad |H(f)| = \left| \frac{\sin(\pi M f)}{\sin\left(\frac{\pi f}{R}\right)} \right|^N$$

図 3 に、CIC フィルタの振幅応答の例を示します。

図 3. CIC フィルタの振幅応答 ( $N = 9$ 、 $R = 8$ 、 $M = 1$  の場合)



CIC フィルタの詳細は、Matthew Donadio による「Cascaded Integrator-Comb (CIC) Filter Introduction」を参照してください。

[www.dspguru.com/info/tutor/cic.htm](http://www.dspguru.com/info/tutor/cic.htm) より入手できます。

## CIC 補償フィルタの設計

図 3 より、段数が多い CIC フィルタには周波数応答に広い平坦な通過帯域がないことがわかります。平坦な通過帯域を実現するために、CIC フィルタとは逆の振幅応答特性を持つ FIR フィルタを適用して、周波数応答を補正できます。このようなフィルタを「補償フィルタ」と呼びます。

データ・レートを低くする変換の場合、CIC フィルタの後に補償フィルタを適用します。サンプリング・レートを高くするシステムの場合、補償 FIR フィルタによってデータをあらかじめコンディショニングしてから CIC フィルタを適用します。言いかえれば、補償フィルタは常にレー

ト変換設計のレートが低い側で動作することを意味します。低い周波数で動作する補償フィルタでは、ハードウェアリソースの時分割共有が可能となり、効率的なハードウェア・インプリメンテーションが実現できます。

計算式 4 に、CIC フィルタの振幅応答を示します。平坦な通過帯域を得るには、補償 FIR フィルタに計算式 5 に示すような、計算式 4 とは逆の振幅応答を持たせる必要があります。

$$(5) \quad G(f) = \left| MR \left( \frac{\sin(\pi f/R)}{\sin(\pi Mf)} \right) \right|^N \approx \left| \frac{\pi Mf}{\sin(\pi Mf)} \right|^N = \left| \text{sinc}^{-1}(Mf) \right|^N$$


$R$  が大きい場合、補償フィルタの応答は逆 sinc 関数で近似できるため、この補償フィルタを「逆 sinc フィルタ」と呼ぶ場合もあります。

レート変換システムの中には、補償フィルタもマルチレート・フィルタにしたものがあります。これらのシステムでは、必要に応じてデシメーションやインターポレーションを更に実装できますが、変換率の増加は通常 2 倍以下です。

## MATLAB による補償フィルタ係数の生成

CIC 補償フィルタを設計する場合、指定した周波数応答に基づいてフィルタ係数を生成できるものなら、どのようなフィルタ設計ツールでもかまいません。このアプリケーション・ノートでは、MATLAB 信号処理ツールボックスの **fir2** ファンクションを使用して、CIC 補償フィルタの係数を生成します。

**fir2** ファンクションは、周波数サンプリング法に基づいた、任意の周波数応答から FIR フィルタを設計します。生成されるフィルタ係数は実数で対称性があります。デジタル FIR フィルタの次数  $L$  と、ベクタ  $F$  (周波数) および  $A$  (ブレイク・ポイント  $F$  における振幅応答) によって周波数応答を指定できます。**fir2** ファンクションは、フィルタ係数の  $(L+1)$  ベクタを返します。

 このアプリケーション・ノートに掲載した MATLAB スクリプトは、アルテラ CIC コンパイラ MegaCore ファンクション Ver. 7.1 によって自動的に生成したものです。



周波数サンプリング法の詳細については、L.R. Rabiner, B. Gold, C.A. McGonegal, 「An approach to the approximation problem for nonrecursive digital filters」、IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, pp. 83-106, vol. Au-18, No. 2, 1970 年 6 月を参照してください。



**fir2** ファンクションの詳細は、MATLAB のヘルプを参照してください。

例 1 に、CIC 補償フィルタの係数を生成する MATLAB スクリプトを示します。

### 例 1. CIC 補償フィルタ係数の生成

```

##### CIC フィルタ・パラメータ #####
R = 4;                                %% デシメーション率
M = 1;                                %% 遅延差
N = 8;                                %% 段数
B = 18;                               %% 係数のビット幅
Fs = 91.392e6;                        %% デシメーション前の (高) サンプル周波数 (Hz)
Fc = 4.85e6;                          %% 通過帯域境界 (Hz)

##### fir2.m パラメータ #####
L = 110;                               %% フィルタ次数 (偶数を指定のこと)
Fo = R*Fc/Fs;                          %% 正規化遮断周波数: 0<Fo<=0.5/M
% Fo = 0.5/M;                          %% 通過帯域外の応答を気にしないならば
% Fo=0.5 を使用

##### fir2.m による CIC 補償器の設計 #####
p = 2e3;                                %% 粒度
s = 0.25/p;                             %% ステップ・サイズ
fp = [0:s:Fo];                          %% 通過帯域周波数サンプル
fs = (Fo+s):s:0.5;                      %% 阻止帯域周波数サンプル
f = [fp fs]*2;                          %% 正規化周波数サンプル: 0<=f<=1
Mp = ones(1,length(fp));               %% 通過帯域応答: Mp(1)=1
Mp(2:end) = abs( M*R*sin(pi*fp(2:end)/R) ./ sin(pi*M*fp(2:end))) .^N;
Mf = [Mp zeros(1,length(fs))];
f(end) = 1;

h = fir2(L,f,Mf);                       %% フィルタ長 L+1
h = h/max(h);                           %% 浮動小数点型の係数
hz = round(h*power(2,B-1)-1);           %% 固定小数点型の係数

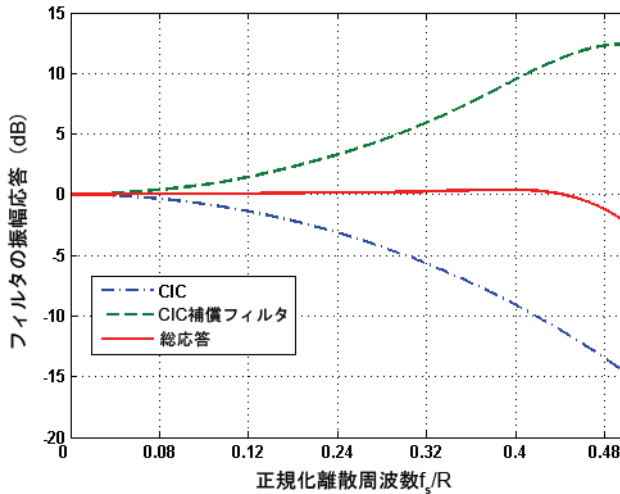
```

### 補償フィルタの例

図 4 に、CIC フィルタの応答および同フィルタの補償フィルタ応答の例を示します。青の点線は、レート変換率  $R=4$ 、遅延差  $M=1$ 、積分 - 楕円フィルタ・ペアの数  $N=4$  の場合の、CIC フィルタの振幅応答です。応答は、低周波  $f_s/R$  についてプロットしてあります。緑の破線は、単一レートの補償フィルタの応答をその動作周波数  $f_s/R$  の範囲についてプロットしたものです。これら点線と破線の特性の積が CIC および補償フィルタをカスケード接続した場合の総応答となります。これを赤の実線で示しました。

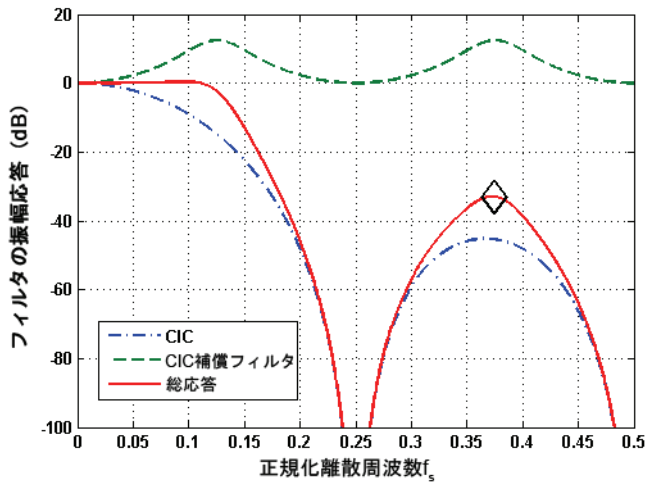
フィルタ・カスケードが十分に平坦な応答を示すことがはっきりとわかります。この例では、**fir2** を使って 15 タップの FIR 補償フィルタを設計しました。このフィルタの 18 ビット幅の係数は、[-215, 446, -1258, 3213, -7586, 17668, -44268, 131071, -44268, 17668, -7586, 3213, -1258, 446, -215] です。高周波 ( $f_s$ ) の総応答を 8 ページの図 5 に示します。

図 4. 4 段 CIC フィルタ用補償フィルタの  $f_s/R$  の範囲へのプロットに対する応答



補償フィルタが低周波 ( $f_s/R$ ) で動作していることに注意してください。単一レートの補償フィルタの場合、エイリアシングを防ぐために遮断周波数 ( $f_c$ ) は、出力周波数の半分以下とします ( $f_c \leq (f_s/R)/2$ )。図 4 に示すように、遮断周波数がちょうど  $(f_s/R)/2$  の場合、補償フィルタは全帯域幅にわたって逆 sinc 応答を示すため、このようなフィルタを「広帯域補償フィルタ」と呼ぶ場合があります (図 5)。

マルチレートの補償フィルタの場合、レート変換率 2 のデシメーション補償フィルタの入力サンプリング・レートは  $f_s/R$ 、出力サンプリング・レートは  $(f_s/R)/2$  です。エイリアシングを防ぐため、補償フィルタの遮断周波数は  $(f_s/R)/2$  の半分以下、つまり  $(f_s/R)/4$  以下でなければなりません。

図5.  $f_s$  に対する広帯域補償フィルタの応答 ( $R=4$ ,  $N=4$ ,  $M=1$  の場合) 注 (1)

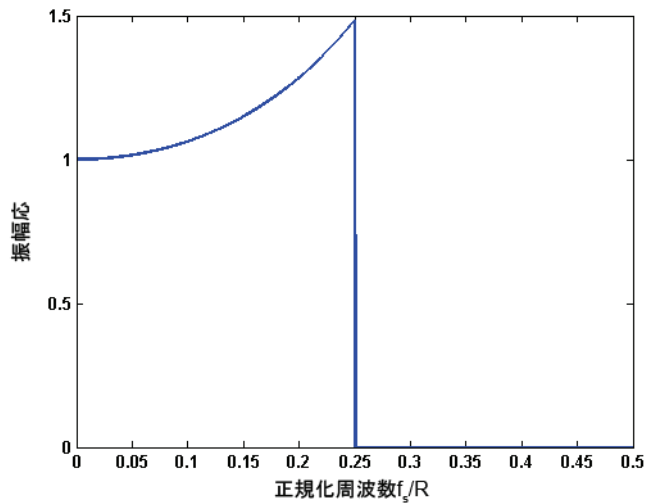
## 図5の注:

(1) 黒の菱形のマークは、補償フィルタが周波数応答を補正したことによる阻止帯域増幅を示しています。

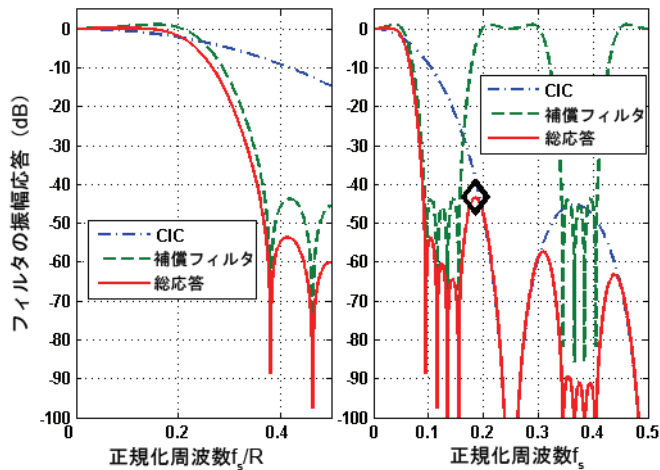
## 通過帯域境界の選定

狭帯域のレート変換システムでは、狭い遷移帯域幅と阻止帯域における優れた減衰率が求められます。残念ながらCICフィルタだけでは、このような特性を得られません。図4に示した平坦な通過帯域の欠如に加えて、CICフィルタ自体に、遷移帯域が明確に規定されないという欠点があります。この問題は補償フィルタの応答を制御することで緩和できます。図4および図5に示した広帯域補償応答を使用する代わりに、ロー・パス補償フィルタに通過帯域境界や阻止帯域減衰などの制約を課す方法があります。

例えば、補償フィルタの例(6ページの「補償フィルタの例」を参照)の要件を変更できます。広帯域補償の代わりに、正規化された低周波  $f_s/R$  の4分の1の場所に通過帯域境界を設定します ( $f_c = (f_s/R)/4$ )。こうすると補償フィルタの理想的な応答は、通過帯域内では逆 sinc 特性を示し、通過帯域外ではゼロになります(図6を参照)。

図6. 遮断周波数を  $(f_s/R)/4$  とした場合の理想補償フィルタの応答

この理想周波数応答から、**fir2** により新しい補償フィルタ係数を生成できます。その応答特性を図7に示します。

図7. 正規化遮断周波数を  $(f_s/R)/4$  として設計された補償フィルタの応答 注 (1)

## 図7の注:

(1) 黒の菱形のマークは、補償フィルタが周波数応答を補正したことによる阻止帯域増幅を示しています。

図5と図7からは、通過帯域の選定がノイズ増幅にも影響を与えることがわかります。これらの例では、CIC フィルタの最初のヌルが高周波スケール  $f_s$  上では  $(1/M)/R$  に位置します (つまり、低周波  $f_s/R$  では  $1/M$ )。通過帯域境界がこのヌルに近づくとき、CIC フィルタの減衰率が高まるため、補償フィルタによるより大きな補正が必要になります。このような補正が、阻止帯域内のノイズ増幅を招きます。図5と図7の黒い菱形のマークは、この点を示しています。阻止帯域内の総応答には、遮断周波数の像の位置にスパイクが現れます。通過帯域の境界が最初のヌルに近ければ近いほど、そして段数が多いほど、このスパイクは大きくなります。極端な場合、つまり図5に示した広帯域補償の場合、ノイズ増幅が著しく大きくなる可能性があります。したがって、CIC フィルタと補償フィルタのカスケードを設計する場合、通過帯域の幅は慎重に選定する必要があります。



通過帯域境界が低周波スケール  $f_s/R$  上で最初のヌルの  $1/4$  未満になるように設計することを推奨します。

## データ・レートを低くする変換の例

ここでは、IEEE 802.16d (WiMAX) デジタル・ダウン・コンバージョン (DDC) の要件に基づいた、実用的なデシメーション・フィルタ・チェーンを設計する方法について説明します。WiMAX DDC ファンクションは、

周波数応答に対して厳しいシステム要件が課されており、マルチレート・システムの設計方法やフィルタ・パラメータの選定方法を説明するうえでよい例と言えます。



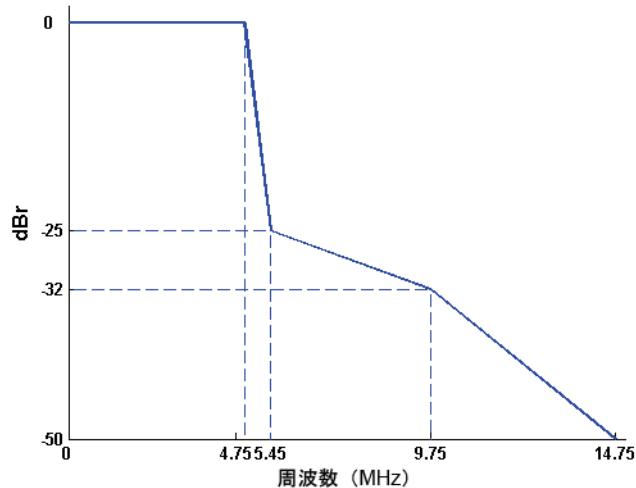
IEEE 規格の詳細については、*IEEE Standard for Local and Metropolitan Area Networks, Part 16: Air Interface for Fixed Broadband Wireless Access Systems*, IEEE P802.16-REVd/D5-2004、2004 年 5 月を参照してください。

設計では、変換率 8 のデシメーション・フィルタ・チェーンを使用します。表 1 に、システムの主要パラメータを示します。

表 1. WiMAX DDC 総スペクトル要件の例	
パラメータ	値
入力サンプリング周波数	91.392 MHz
出力サンプリング周波数	11.424 MHz
通過帯域境界	4.75 MHz
通過帯域リップル	< 0.05 dB
阻止帯域減衰率	> 90 dB

総フィルタ応答は、[図 8](#) に示す WiMAX ダウンリンク・スペクトル・マスクに従います。

**図 8. WiMAX 送信スペクトル・マスク**



### ソリューション 1 : 1 段構成のデシメーション

このソリューションでは、変換率 8 のデシメーション CIC フィルタによって、遅延差  $M=1$ 、段数  $N=9$  のレート変換を実装します (阻止帯域減衰を実現するため)。補償フィルタは、11.424 MHz で動作する単一レートの FIR フィルタです。通過帯域境界は、必要な値 4.75 MHz より若干高い 4.85 MHz に設定し、4.75 MHz のデータ・サブキャリアに対する良好な性能を保証しています。フィルタの次数  $L$  は 110 とします。このような大きなフィルタ次数が必要になるのは、通過帯域のリップルを小さくすること、および遷移帯域を狭くすることの 2 つの要件を満たすためです。fir2 を使い、フィルタ係数を 18 ビット幅で設計すると、CIC フィルタと補償フィルタのカスケード応答として [図 9](#) が得られます。性能の一覧を [16 ページの表 2](#) に示します。

図9.1 段構成のデシメーション設計におけるCIC および補償フィルタの応答とWiMAX スペクトル・マスク 注 (1)

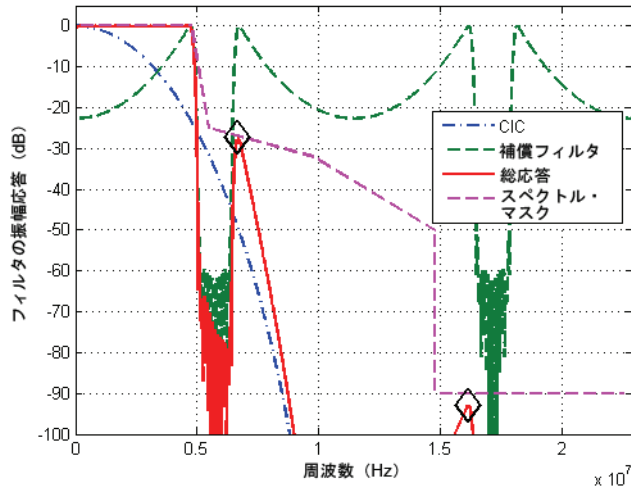
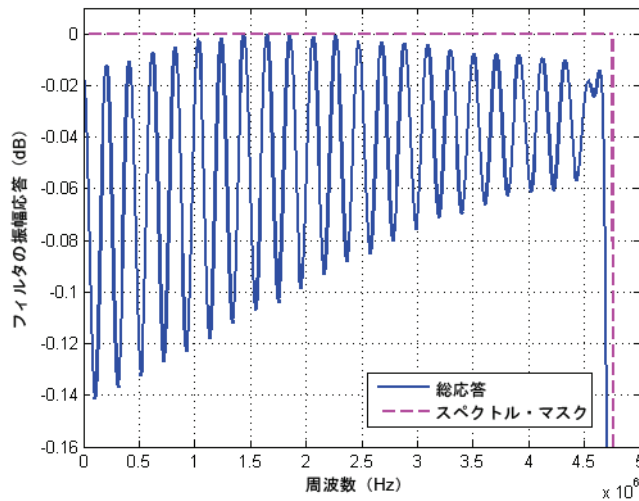


図9の注:

- (1) 黒の菱形のマークは、補償フィルタが周波数応答を補正したことによる阻止帯域増幅を示しています。

上記の設計では、補償フィルタの周波数補正により黒い菱形のマークが示す位置に、明らかにノイズ増幅が発生しています。総周波数応答は、WiMAX スペクトル・マスクに準拠しているように見えます。しかし、通過帯域を詳細に調べると、図10に示すように、リップルが許容される変動 0.05 dB を上回っていることがわかります。

図10. 設計した1段デシメーション・フィルタ・チェーンの通過帯域



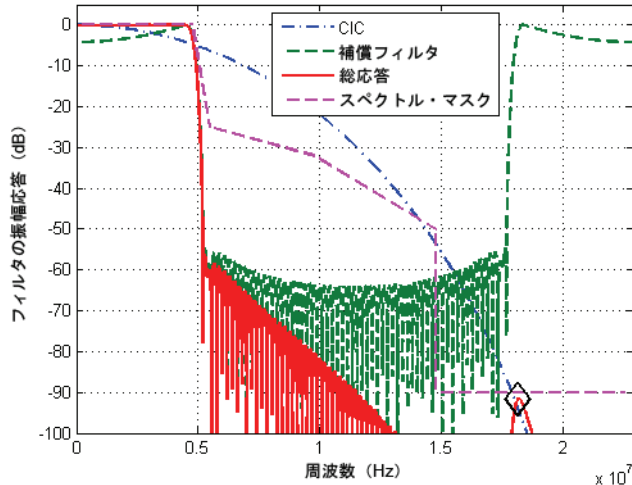
補償フィルタの次数  $L$  を大きくすれば、通過帯域の変動をいくぶん改善できますが、システム要件を満たすには不十分です。補償フィルタの次数を大きくすることは実用的な解にならないだけでなく、遷移帯域のノイズ増幅を大きくします。このソリューションの場合、 $L$  が 160 を超えると、6.6 MHz 周辺の振幅応答が WiMAX スペクトル・マスクを超える可能性があります (図 9 の最初の黒い菱形マーカ位置)。16 ページの表 2 の最後の列に示すとおり、この 1 段構成のデシメーション・ソリューションでは、正規化された通過帯域の境界が低周波数スケール ( $f_s/R$ ) 上で 0.42 になり、最初のヌルに近すぎます。正規化されたデジタル通過帯域幅の推奨値は 0.25 です。

## ソリューション 2：多段構成のデシメーション

デジタル・フィルタ設計の理論によれば、他のすべてのパラメータを固定した場合、通過帯域における変動は正規化された遷移帯域幅に比例します。この例での正規化された遷移帯域幅は WiMAX スペクトル・マスクと補償フィルタの動作周波数で決まります。1 段構成のデシメーション・アーキテクチャでは、次の 2 つの理由でフィルタの設計要件を満たせませんでした。1) 補償フィルタの動作周波数が低すぎ、正規化された遷移帯域幅が広がるため。2) 正規化された遮断周波数が最初のヌルに近すぎるため。

これらの問題に対する自然な解決策として、デシメーションを多段に分割する方法があります。この第2のソリューションでは、変換率4のデシメーションCICフィルタの後ろに、更に変換率2を実装する補償FIRフィルタをつなぎます。CICフィルタは $N=8$ で、遅延差 $M=1$ です。補償フィルタの入力サンプリング周波数は22.848 MHz、出力信号は11.424 MHzです。補償フィルタの次数 $L$ は110で、通過帯域の境界は4.85 MHzのままです。ソリューション1と比べると、正規化遷移帯域幅は半分になり、正規化通過帯域境界も半分になっています。性能パラメータの一覧を16ページの表2に示します。フィルタ・カスケードの応答を図11と図12に示します。

図11. 多段構成のデシメーション設計におけるCICおよび補償フィルタの応答とWiMAXスペクトル・マスク 注(1)



**図11の注:**

(1) 黒の菱形のマークは、補償フィルタが周波数応答を補正したことによる阻止帯域増幅を示しています。

多段デシメーション・ソリューションでは正規化遮断周波数が小さくなっているため、1段デシメーションに比べてノイズ増幅がずっと軽減されています。図11の黒い菱形のマークは、補償フィルタの通過帯域境界の像によって生ずる周波数応答のスパイクを示しています。

通過帯域を詳細に調べると、多段デシメーションでは変動に対する要件が満たされていることを確認できます。図12に、ソリューション2の通過帯域応答を示します。

図12. 多段設計の通過帯域応答

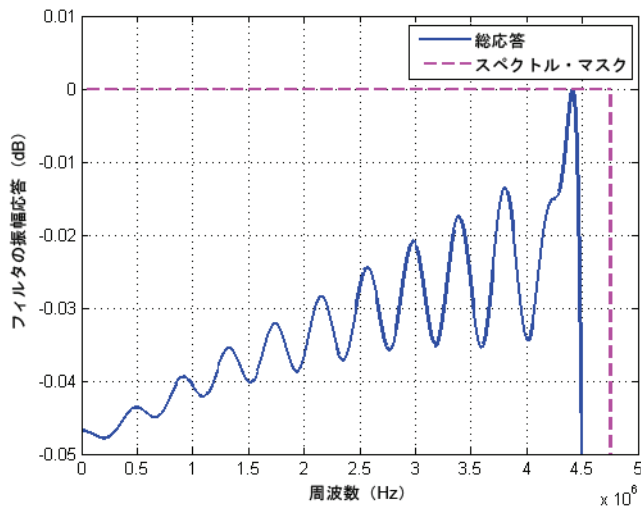


表2に、WiMAX DDC フィルタの設計性能を示します。

ケース	フィルタ次数	通過帯域リップル (dB)	通過帯域境界の像位置における振幅 (dB)	阻止帯域減衰率 (dB)	$f_s/R$ スケール上の通過帯域境界
ソリューション1	110	0.14 ( $\leq 0.05$ )	27.3 ( $\geq 27$ )	92 ( $\geq 90$ )	0.42 ( $\leq 0.25$ )
ソリューション1	160	0.072 ( $\leq 0.05$ )	26.3 ( $\geq 27$ )	91.7 ( $\geq 90$ )	0.42 ( $\leq 0.25$ )
ソリューション2	110	0.048 ( $\leq 0.05$ )	91.5 ( $\geq 90$ )	91.5 ( $\geq 90$ )	0.2 ( $\leq 0.25$ )

**表2の注:**

(1) 括弧内は、そのパラメータに必要とされる値です。

## まとめ

このアプリケーション・ノートでは、サンプル・レート変換システム用の CIC 補償フィルタについて、設計上の考慮事項を説明しました。CIC フィルタは、幅広いレート変換率を持つデシメーションおよびインターポレーションを、優れたハードウェア効率で実装できます。しかし、CIC フィルタの応答では平坦な通過帯域応答、および良好な遷移帯域幅が得られません。これらの問題を解決するために補償 FIR フィルタを設計します。このフィルタによって、周波数補正とスペクトル整形が可能になり、更に 2 倍のレート変換を追加できます。このアプリケーション・ノートでは、周波数サンプリング法 **fir2** によって補償フィルタを設計する場合の、MATLAB 信号処理ツールボックスの使用方法について説明しました。参考としてスクリプトの例を掲載してあります。WiMAX デジタル・ダウン・コンバージョン・パラメータの詳細な例によって、補償フィルタ、CIC および FIR フィルタ・カスケードのパラメータ選定方法を説明しています。

## 改訂履歴

表 3 に、このアプリケーション・ノートの改訂履歴を示します。

日付およびドキュメント・バージョン	変更内容	概要
2007 年 4 月 v1.0	初版	—



101 Innovation Drive  
San Jose, CA 95134

[www.altera.com](http://www.altera.com)

Technical Support:

[www.altera.com/support/](http://www.altera.com/support/)

Literature Services:

[literature@altera.com](mailto:literature@altera.com)

Copyright © 2007 Altera Corporation. All rights reserved. Altera, The Programmable Solutions Company, the stylized Altera logo, specific device designations, and all other words and logos that are identified as trademarks and/or service marks are, unless noted otherwise, the trademarks and service marks of Altera Corporation in the U.S. and other countries. All other product or service names are the property of their respective holders. Altera products are protected under numerous U.S. and foreign patents and pending applications, maskwork rights, and copyrights. Altera warrants performance of its semiconductor products to current specifications in accordance with Altera's standard warranty, but reserves the right to make changes to any products and services at any time without notice. Altera assumes no responsibility or liability arising out of the application or use of any information, product, or service described herein except as expressly agreed to in writing by Altera Corporation. Altera customers are advised to obtain the latest version of device specifications before relying on any published information and before placing orders for products or services.



I.S. EN ISO 9001